Dagens 22/9

1. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:

   a. $\cos^2 \dfrac{1}{x}$ b. $\ln\sqrt{\tan 2x}$

   c. $x^{\sin x}$ d. $\operatorname{arc}\cot \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

   e. $\ln\sin(2x+1)$ f. $\arctan\sqrt{2x-1}$

   g. $\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ h. $2\arccos\dfrac{2-x}{2}-\sqrt{4x-x^2}$

   i. $x^3 e^{-x}\sqrt{x-x^2}$ j. $\dfrac{(x-2x^2)\sqrt{1+2x}}{(1+3x)(1-x)^3}$

2. Beräkna derivatorna $\dfrac{dy}{dx}$ och $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ uttryckta i x och y då funktionen $y = y(x)$ definieras av:

   a. $x^3y^3 + xy = 1.$ b. $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y^3}{x^3}=1$

3. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till grafen då funktionen $y = y(x)$ definieras av:

   a. $x^3 - xy + y^3 = 7$ i punkten (2,1). b. $\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+y^3} = 5$ i punkten (1,2).

   c. $7\sqrt{x+2y} - xy^2 = 12$ i punkten (2,1).

4. Beräkna höger- och vänsterderivatorna i $x = 0$ till följande funktioner:

   a. $f(x) = |x|\cos x.$ b. $f(x) = |x|\sin x$

Svar

1. a. $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}$ b. $\dfrac{2}{\sin 4x}$ c. $x^{\sin x-1}(x\cos x\ln x+\sin x)$

   d. $\dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$ e. $2\cot(2x+1)$ f. $\dfrac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$

   g. $\dfrac{1}{1+x^2}$ h. $\dfrac{x}{\sqrt{4x-x^2}}$ i. $\dfrac{x^3e^{-x}(2x^2-10x+7)}{2\sqrt{x-x^2}}$

   j. $\dfrac{1+x-3x^2-17x^3-18x^4}{(1+3x)^2(x-1)^4\sqrt{1+2x}}$

2. a. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x},\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2y}{x^2}$ b. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x},\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=0$

3. a. Tangent: $11x + y = 23.$ Normal: $x - 11y + 9 = 0.$

   b. Tangent: $8x + 27y = 62.$ Normal: $27x - 8y = 11.$

   c. Tangent: $3x - 2y = 4$. Normal: $2x + 3y = 7.$

4. a. $f'_+(0) = 1,\ f'_-(0) = -1.$ b. $f'_+(0) = f'_-(0) = 0.$

<u>Dagens 24/9</u>

1. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:
   - a. $f(x) = 4\arctan x + 5\,\text{arccot}\,2x$
   - b. $f(x) = 2\ln(1 + (2x - 2)^2) + \text{arccot}(2x - 2) + 2x$
   - c. $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$
   - d. $f(x) = x + \arctan(1 - 2x)$
   - e. $f(x) = x + \ln(2 - 2x + x^2)$
   - f. $f(x) = 4x + 5\ln(2 - 2x + x^2)$

2. Ekvationen $x^3 - 3xy - y^3 + 3 = 0$ definierar en funktion $y = y(x)$ sådan att $y(1) = 1$. Bestäm derivatan $y'(x)$ uttryckt i x och y. Visa att $x = 1$ är en lokal extrempunkt till y och bestäm dess karaktär.

3. Bestäm största och minsta värdena till följande funktioner:
   - a. $2x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x,\ 0 \le x \le 1.$
   - b. $x + 2\ln(-4 + 6x - x^2),\ 1 \le x \le 5.$
   - c. $4\sqrt{1 - x^2} + 3x$
   - d. $x^2 - 4|x - 1| - 2x,\ 0 \le x \le 4$

4. Visa följande olikheter:
   - a. $2\ln x \le x^2 - 1$, för alla $x > 0$
   - b. $\ln(1 + 2x) \ge \dfrac{3x}{x + 2}$, för alla $x \ge 0$
   - c. $e^{-x} \ge 1 - x$, för alla x

5. Visa att funktionen f är inverterbar
   - a. $f(x) = 3x - \arctan 2x$
   - b. $f(x) = x\sqrt{1 + |x|}$

6. Bestäm definitionsmängden och värdemängden till funktionen
   - a. $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$
   - b. $f(x) = \sqrt{1 - x} + \arcsin x$

7. Hur stor kan produkten ab av två tal a och b maximalt vara om $a^4 + 2b^2 = 48$?

8. Bestäm konstanten a så att funktionen $f(x) = (x + 1)(a - \arctan x)$ har en kritisk punkt för $x = 0$. Avgör också om det är ett lokalt maximum eller minimum eller en terasspunkt.

9. För vilka värden på konstanten a är funktionen $f(x) = ax - 3\arctan 2x$ inverterbar?

10. Hur stor kan lutningen hos tangenten till kurvan $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ vara maximalt?

11. Visa att $x^4 + 32|x - 1| \ge 1$ för alla x.

<u>Svar</u>

1. a. Lok max i -1, lok min i 1.
   b. Lok max i -1, lok min i 1
   c. Lok min i 1 och 3, lok max i 2.
   d. Lok max i 0, lok min i 1.
   e. Finns inga.
   f. Lok max i -1, lok min i 1/2.

2. $y' = \dfrac{x^2 - y}{x + y^2}$, $x = 1$ är en lokal minimipunkt.

3. a. $\sqrt{3}/2 + \pi/3$ och 0.
   b. 4+4ln2 och 1.
   c. 5 och -3.
   d. -1 och -5.

6. a. $D_f = [1,3],\ V_f = [\sqrt{2}, 2]$
   b. $D_f = [-1,1],\ V_f = [\pi/2, \sqrt{2} - \pi/2]$

7. 8

8. $a = 1$; lokalt maximum.

9. $a \geq 6$

10. 1